

**Exercice N°1** (4 points)

Répondre par vrai ou faux, en justifiant votre réponse.

- 1) Si  $U$  est une suite vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $\begin{cases} U_n < 0 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \end{cases}$  alors  $U$  n'est pas minorée.
- 2) Soit une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant: pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) + f(-x) = 3$  alors la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  est paire.
- 3) Si  $x$  est un entier relatif tel que :  $x \equiv 16 \pmod{17}$  alors  $x^{2009} + x^{2011} \equiv 0 \pmod{17}$
- 4) L'équation:  $z^4 - 2z^2 + 3i = 0$  n'admet aucune solution réelle ou imaginaire.

**Exercice N°2** (4 points)

A/ Soit  $n$  un entier naturel.

- 1) Déterminer les restes possibles de la division euclidienne de  $4^n$  par 9.
- 2) Soit le nombre  $A_n = (3n - 1) \cdot 4^n + 1$ .
  - a) Vérifier que si  $n = 3q$  alors l'entier  $A_n$  est divisible par 9.
  - b) Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'entier  $A_n$  est divisible par 9.

B/ 1) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  :  $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{7}$

- 2) Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^3$  est de la forme  $7k$ ,  $7k + 1$  ou  $7k - 1$

**Exercice N°3** (4 points)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par :  $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$

- 1) a) Etudier les variations de  $f$ .  
 b) En déduire que  $f$  réalise une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $[\frac{1}{2}, +\infty[$ .  
 c) Calculer  $f^{-1}(1)$  et  $f^{-1}(\frac{2}{3})$ .
- 2) Tracer, dans le même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les courbes  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$ .
- 3) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $[\frac{1}{2}, +\infty[$  et que pour tout  $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$  on a:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{2x-1}}$$

**Exercice N°4**

(8 points)

A/ Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ .

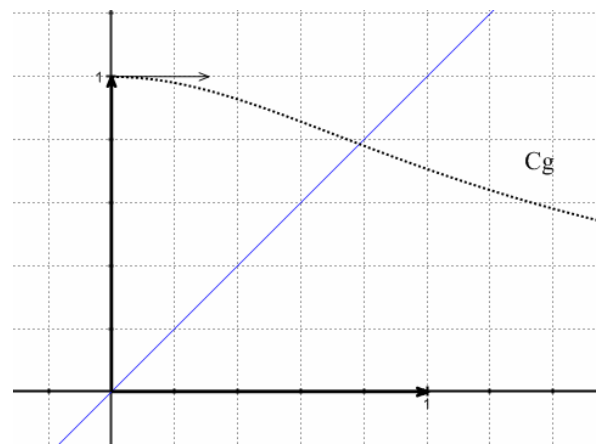
$C$  désigne la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Etudier la parité de  $f$ .  
 b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.  
 c) Etudier les variations de  $f$  sur  $]0,1]$   
 d) Construire la courbe  $C$ .
- 2) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0,1]$  sur  $[0, +\infty[$ .  
 b) Expliciter  $f^{-1}(x)$  et tracer la courbe  $C'$  de  $f^{-1}$  dans le même repère que celui de  $C$ .

B/ Dans la figure ci-contre on a représenté graphiquement une fonction  $g$  définie sur  $[0, +\infty[$ .

On définit la suite  $U$  par :  $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}; n \in \mathbb{N}$

- 1) a) Reproduire sur votre copie la courbe  $C_g$  puis représenter graphiquement la suite  $U$ .  
 b) À partir graphique, que peut on conjecturer pour la monotonie de la suite  $U$  ainsi que pour sa convergence?



**On admet pour la suite** que pour tout  $x \geq 0$ ,  $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

- 2) Montrer que l'équation :  $g(x) = x$  admet une solution unique  $\alpha$ . Vérifier que  $\alpha \in ]0, 1[$ .
- 3) a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq U_n \leq 1$ .  
 b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$   
 c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;  $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n \alpha$ .  
 d) En déduire que la suite  $U$  est convergente et préciser sa limite

L.P.K Corrigé du DS<sub>1</sub> U.Ne

⊛ Exercice N°1:

1) Vrai.

Justification:  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{U_n} < 0$   
 donc  $U$  est décroissante donc si elle est minorée elle sera convergente sa limite réelle donc  $l = l + \frac{1}{l}$   
 $\rightarrow \frac{1}{l} = 0$  ce qui est impossible.

2) Vrai.

Justification:  $f(n) + f(-n) = 3$   
 $\Rightarrow f'(n) - f'(-n) = 0 \Rightarrow f'(n) = f'(-n)$

3) Faux.

Justification:  $x \equiv 16 [17] \Rightarrow$   
 $x \equiv -1 [17] \rightarrow x^{2009} + x^{2011} \equiv -2 \not\equiv 0 [17]$

4) Vrai.

Justification: il suffit de remarquer que si  $z \in \mathbb{R}$  ou  $z \in i\mathbb{R}$  alors  $z^4 - 2z^2 \in \mathbb{R}$ .

⊛ Exercice N°2:

A/15  $u^0 \equiv 1 [9]$ ,  $u^1 \equiv 4 [9]$

$u^2 \equiv 7 [9]$ ,  $u^3 \equiv 1 [9]$

si  $n = 3q$  alors  $u^n = (u^3)^q \equiv 1 [9]$

si  $n = 3q+1$  alors  $u^n = u \times u^{3q} \equiv 4 [9]$

si  $n = 3q+2$  alors  $u^n = u^2 \times u^{3q} \equiv 7 [9]$

2) a) si  $n = 3q$  alors

$A_n = 9q u^n - u^n + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 [9]$ .

b) si  $n = 3q$  alors  $A_n \in 9\mathbb{Z}$  (d'après a)

si  $n = 3q+1$  alors  $3n-1 = 9q+2 \equiv 2 [9]$

$\{u^n \equiv 4 [9]\}$

$\rightarrow (3n-1) u^n \equiv 8 [9] \rightarrow A_n \equiv 0 [9]$

Prof. Chahiri

si  $n = 3q+2$  alors  $3n-1 = 9q+5 \equiv 5 [9]$

$\{u^n \equiv 7 [9]\}$

$\rightarrow A_n \equiv 36 \equiv 0 [9]$

donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \in 9\mathbb{Z}$

B/15 modulo 7:

reste de $n$	0	1	2	3	4	5	6
$(n^2+n) \pmod 7$	1	3	0	6	0	3	1

donc  $S_2 = \{7k+2, 7k+6, k \in \mathbb{Z}\}$ .

reste de $(n)$	0	1	2	3	4	5	6
reste de $(n^3)$	0	1	1	6	1	6	6

et comme  $6 \equiv -1 [7]$  donc

$n^3 \equiv 7k$  ou  $7k+1$  ou  $7k-1$ .

⊛ Exercice N°3:

$f(n) = \frac{1}{1+\sin n}$ ,  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

1) a)  $D_f = ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f$  est continue et dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f = +\infty$  ...  $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

$f'(n) = \frac{-\cos n}{(1+\sin n)^2}$

$n$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(n)$	-	0
$f(n)$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

b) Dérivation: ...  $f$  bijective de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  sur  $(\frac{1}{2}, +\infty[$ .

cs  $f^{-1}(1) = x \Leftrightarrow f(x) = 1$   
 $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{d'où } f^{-1}(1) = 0$$

$$f^{-1}\left(\frac{e}{3}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e}{3}$$

$$x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{d'où } f^{-1}\left(\frac{e}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$$

2) Courbes : voir à la fin.

3)  $f$  est dérivable sur  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$f'(x) \neq 0, \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$f: ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow ]\frac{1}{2}, +\infty[$$

alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $]\frac{1}{2}, +\infty[$ .

$$\forall x \in ]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{f'(y)} \quad \text{avec } \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x = f(y) = \frac{1}{1+\sin y} \end{cases}$$

$$= \frac{(1+\sin y)^2}{-\cos y}$$

$$= \frac{(1+\sin y)^2}{-\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x}-1)^2}}$$

$$\text{d'où } (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{2x-1}}$$

### \* Exercice N°4 :

A/1/a)  $D_f = [-1, 1] \setminus \{0\}$

$\forall x \in D_f, -x \in D_f$  et  $f(-x) = -f(x)$   
donc  $f$  est impaire.

b) posons  $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1}, x < 1$ .

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x(1-x)} = \frac{-(1+x)}{x\sqrt{1-x^2}}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi = -\infty$  alors  $f$  n'est pas dérivable à gauche en 1.

$\varphi$  admet au point  $(1, 0)$  une demi-tangente verticale d'éq :  $\begin{cases} x=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

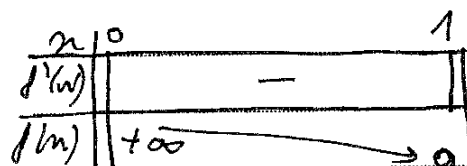
$$C) D_E = ]0, 1]$$

$f$  est continue sur  $]0, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f = +\infty \quad f(1) = 0$$

$f$  est dérivable sur  $]0, 1[$

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$



d) Courbe : voir à la fin.

2/a) ...  $f$  bijective de  $]0, 1]$

vers  $[0, +\infty[$ .

b)  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$   
 $\begin{cases} x \in [0, +\infty[ \\ y \in ]0, 1] \end{cases}$

$$f(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1+\sin y} = x \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} = xy$$

$$\Leftrightarrow 1-y^2 = x^2 y^2 \Leftrightarrow y^2(1+x^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{d'où } \forall x \geq 0, f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

• courbe : à la fin.

B/1/a) représentation : à la fin.

b) conjecture :

•  $U$  n'est pas monotone.

•  $U$  est convergente.

2) posons  $\varphi(x) = g(x) - x, x \geq 0$ .

$$\varphi'(x) = g'(x) - 1 < 0 \text{ donc } \varphi \text{ est}$$

strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$

alors elle réalise une bijection

de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\varphi(\mathbb{R}_+)$  et comme

$\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  alors

$$\varphi(\mathbb{R}_+) = ]\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi, \varphi(0)]$$

$$= ]-\infty, 1]$$

et puisque  $0 \in ]-\infty, 1]$

alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ , unique  
tel que  $\varphi(\alpha) = \alpha$ .

$$\varphi(\alpha) = \alpha \iff g(\alpha) = \alpha.$$

$$\varphi(0) = 1 > 0$$

$$g \rightarrow 0 < \alpha < 1.$$

$$\varphi(1) = g(1) = 1 < 0$$

3) a) Démontrons par récurrence

$$P_n: \{ \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1 \}$$

$$\text{pour } n=0 \quad 0 \leq U_0 = 0 \leq 1$$

d'où  $P_0$  est vraie.

supposons que  $0 \leq U_n \leq 1$  et

$$P_n: 0 \leq U_{n+1} \leq 1.$$

$$\{ \alpha \leq U_n \leq 1$$

$g$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$

$$\rightarrow 0 \leq g(1) \leq g(U_n) \leq g(0) = 1$$

$$\rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

$$\text{cel: } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$$

b)  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$

$$\{ \forall x \in \mathbb{R}_+, |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

donc, d'après les inégalités des accroissements finis, pour tous

$$a, b \in \mathbb{R}_+, |g(b) - g(a)| \leq \frac{1}{2} |b - a|$$

et comme  $U_n \geq 0$  et  $\alpha \geq 0$  alors

pour  $a = \alpha$  et  $b = U_n$  on obtient

$$|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

$$\text{or } g(U_n) = U_{n+1} \text{ et } g(\alpha) = \alpha$$

$$\text{d'où } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$$

c) Démontrons par récurrence

$$P_n: \{ \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha \}$$

$$\text{pour } n=0 \quad |U_0 - \alpha| = \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \alpha$$

d'où  $P_0$  est vraie

supposons que  $P_n$  est vraie et

mg  $P_{n+1}$  est vraie.

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha \rightarrow$$

$$\frac{1}{2} |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha$$

$$\text{or } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ donc}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \alpha$$

d'où  $P_{n+1}$  est vraie

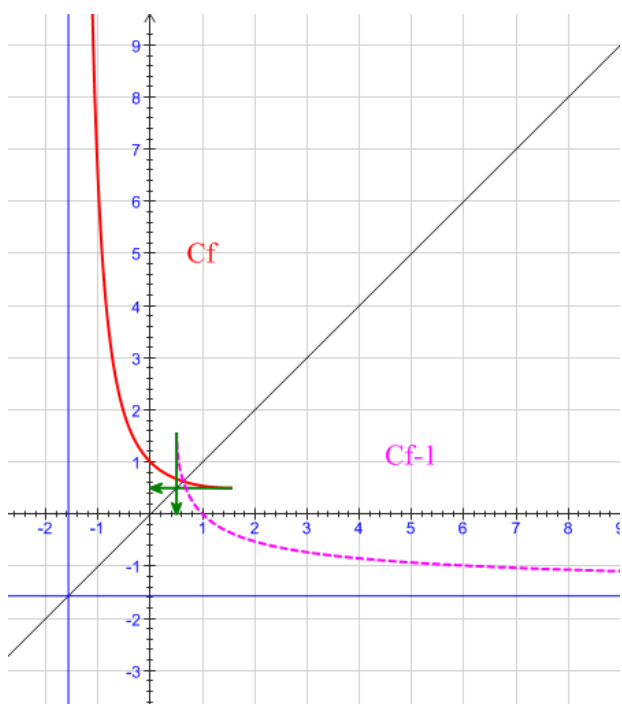
$$\text{cel: } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \alpha = 0$$

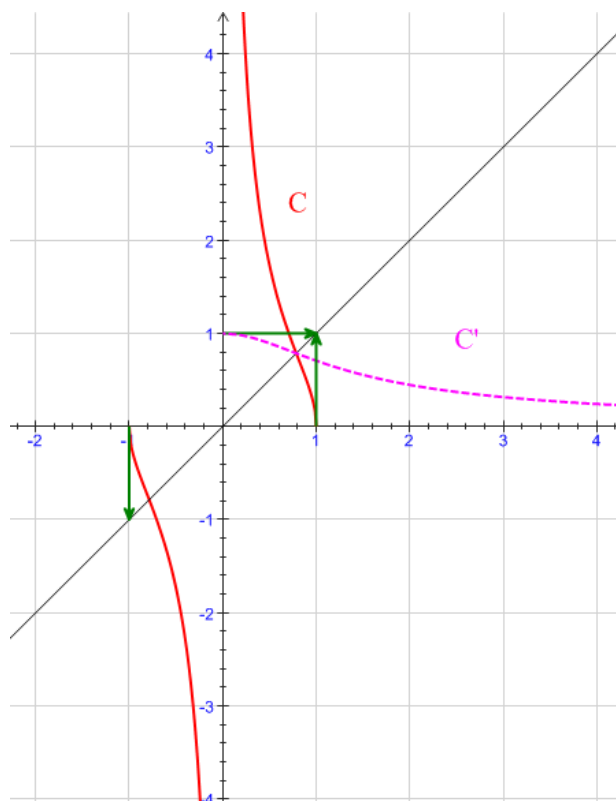
alors  $U$  converge et  $U = \alpha$ .

Exercice N°3



Exercice N°4

A/



Exercice N°4 B/

